

7-4 地震予知に関する確率と関係式の表

Probabilities Related to Earthquake Prediction

東京大学地震研究所 宇津徳治

Tokuji Utsu

Earthquake Research Institute, University of Tokyo

ある地震予知観測項目に現れる異常 A （そのあるものは地震 E の前兆であり、他は前兆でなくいわゆるノイズである）に基づいて地震予知業務を行う場合を考える。異常 A が現れたときには長さ τ の期間は地震 E の発生確率が平常時より高いとみて、その期間（異常期間または警戒期間）に対して予報を出すとする。いま、十分に長い期間（長さ W ）中に地震 E が M 個発生し、そのうち m 個は A による異常期間内に、 μ 個はその他の期間（正常期間）内に含まれるとする。また、 W の間に異常 A は F 回出現し、そのうち m 回はその異常期間内に地震 E を含み、 n 回は含まないとする。この場合には第1表に示すようないろいろな確率が考えられる。ただし、 $T=W/\tau$ とおき、 $M=m+\mu$ 、 $F=m+n$ である。なお、地震 E 、異常 A とも稀な現象で、長さ τ 当りの平均発生（出現）度数と発生（出現）の確率は等しいと考えている。

第1表の確率はみな異なるものであり、混同すべきでない。しかし、これらはまったく独立なものではなく、 p_0 、 q_0 、 p 、 q 、 r 、 s の6個の確率のうちの任意の4個の間には一つの関係式が成り立つ。6個から4個を選ぶ組合せは15通りあるが、第2表にこれら15個の関係式を示す。これらの式は第1表の式によって容易に証明できる。

以上は、異常期間の長さが τ の一つの観測項目を考えた場合であるが、例えば n 個の観測項目があるとき、それらに同時に異常が現れる場合を改めて一つの異常 A とみなすことにすれば、この異常に対しても第2表の諸式は成り立つはずである。ただし、異常期間の長さがまちまちでは困るので、各項目の異常期間の長さは等しく τ であり、二つ以上の異常期間が重複するときには、それらの開始時も一致し完全に重なるという仮定を設ける。

いま、上記の仮定を満たす π 個の独立な観測項目があるとする。 i 番目の項目と j 番目の項目が独立とは、 i 番目の項目に異常が出るか否かは、 j 番目の項目に異常が出るか否かには依らないということである。 i 番目の項目と j 番目の項目がまったく無関係というわけではない。両者は地震 E を通じて間接的に関係している。 i 番目の項目による異常 A 、およびそれのみによる確率 p 、 q 、 r 、 s をそれぞれに添字 i を付けて示すと、第3表に掲げる三つの場合についての p_0 、 p 、 q 、 r 、 s はそれぞれ同表に示すような形で表される。 q 、 s を表す式は独立性の仮定から直ちに得られ、他の式は第2表の公式を用いて導かれる。

上記の仮定が成り立たない場合の議論を含め、詳細は震研彙報に発表する予定である。

第1表 地震予知に関する確率

Table 1 Probabilities related to earthquake prediction.

記 号	定 義	式	説 明 (いろいろな言い表し方がある)
p_0	$P(E)$	$\frac{M}{T}$	長さ τ の期間当りの E の発生率 ランダムに選んだ長さ τ の期間が E を含む確率 ランダムに選んだ長さ τ の期間に出した予報の適中率(まぐれ当り率)
$1-p_0$	$P(\bar{E})$	$\frac{T-M}{T}$	ランダムに選んだ長さ τ の期間が E を含まない確率 ランダムに選んだ長さ τ の期間に出した予報が外れる確率
q_0	$P(A)$	$\frac{F}{T}$	長さ τ の期間当りの A の出現率 全期間のうち A による異常期間の占める割合 ランダムに選んだ長さ τ の期間に A が出現する確率 時間軸上にランダムにとった1点が A による異常区間に含まれる確率
$1-q_0$	$P(\bar{A})$	$\frac{T-F}{T}$	全期間のうち A による正常期間の占める割合 ランダムに選んだ長さ τ の期間に A が出現しない確率 時間軸上にランダムにとった1点が A による正常期間に含まれる確率
p	$P(E A)$	$\frac{m}{F}$	A によるある一つの異常期間が E を含む確率 A による異常期間において長さ τ の期間当りの E の発生率 A にもとづく予報の適中率(予報は長さ τ の異常期間に対して出す)
$1-p$	$P(\bar{E} A)$	$\frac{n}{F}$	A によるある一つの異常期間が E を含まない確率 A にもとづく予報が外れる確率
q	$P(A E)$	$\frac{m}{M}$	ある一つの E が A による異常期間に含まれる確率 ある一つの E の直前の長さ τ の期間に A が出現する確率 A にもとづいて予知業務を行っているときの E の予知率
$1-q$	$P(\bar{A} E)$	$\frac{\mu}{M}$	ある一つの E が A による正常期間に含まれる確率 ある一つの E の直前の長さ τ の期間に A が出現しない確率 A にもとづいて予知業務を行っているとき、ある一つの E が予知されない確率
r	$P(E \bar{A})$	$\frac{\mu}{T-F}$	A による正常期間中にランダムに選んだ長さ τ の期間が E を含む確率 A による正常期間において長さ τ の期間当りの E の発生率 A にもとづいて予知業務を行っているとき予知されない E の長さ τ の期間当りの発生率 A による正常期間において長さ τ の期間に「地震なし」の予報を出すとき、それが外れる確率
$1-r$	$P(\bar{E} \bar{A})$	$\frac{T-(m+n+\mu)}{T-F}$	A による正常期間中にランダムに選んだ長さ τ の期間が E を含まない確率 A による正常期間において長さ τ の期間に出した「地震なし」の予報の適中率
s	$P(A \bar{E})$	$\frac{n}{T-M}$	E の直前の長さ τ の期間を含まないようにランダムに選んだ長さ τ の期間に A が出現する確率 全期間から E の直前の長さ τ の期間を除いた部分のうち、 A による異常期間が占める割合 時間軸上で E の直前の長さ τ の期間を除いた部分にランダムにとった1点が A による異常期間に含まれる確率 A のうち E の前兆ではないものの長さ τ の期間当りの出現率 A にもとづく予報のうち外れたものの長さ τ の期間当りの発表率
$1-s$	$P(\bar{A} \bar{E})$	$\frac{T-(m+n+\mu)}{T-M}$	E の直前の長さ τ の期間を含まないようにランダムに選んだ長さ τ の期間に A が出現しない確率 全期間から E の直前の長さ τ の期間を除いた部分のうち、 A による正常期間が占める割合 時間軸上で E の直前の長さ τ の期間を除いた部分にランダムにとった1点が A による正常期間に含まれる確率

第2表 確率間の関係式

Table 2 Relationa between six probabilities.

記号	p_0	q_0	p	q	r	s	○印の4個の確率間の関係式
定義	$P(E)$	$P(A)$	$P(E A)$	$P(A E)$	$P(E \bar{A})$	$P(A \bar{E})$	
簡略化した説明	永年平均的地震発生率	永年平均的異常出現率	予報の適中率	地震の予知率	予知されない地震の発生率	空振り予報の発表率(ノイズの発生率)	
1	○	○	○	○			$p_0 q = q_0 p$
2	○	○	○		○		$p_0 - r = q_0 (p - r)$
3	○	○	○			○	$(1 - p_0) s = q_0 (1 - p)$
4	○	○		○	○		$(1 - q_0) r = p_0 (1 - q)$
5	○	○		○		○	$q_0 - s = p_0 (q - s)$
6	○	○			○	○	$(1 - p_0) (1 - s) = (1 - q_0) (1 - r)$
7	○		○	○	○		$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{r} = q \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right)$
8	○		○	○		○	$q \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = s \left(\frac{1}{p_0} - 1 \right)$
9	○		○		○	○	$(1 - p) (p_0 - r) = s (1 - p_0) (p - r)$
10	○			○	○	○	$(1 - s) \left(\frac{1}{p_0} - 1 \right) = (1 - q) \left(\frac{1}{r} - 1 \right)$
11		○	○	○	○		$p \left(\frac{1}{q} - 1 \right) = r \left(\frac{1}{q_0} - 1 \right)$
12		○	○	○		○	$\frac{1}{q_0} - \frac{1}{s} = p \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{s} \right)$
13		○	○		○	○	$(1 - r) \left(\frac{1}{q_0} - 1 \right) = (1 - p) \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$
14		○		○	○	○	$(1 - q) (q_0 - s) = r (1 - q_0) (q - s)$
15			○	○	○	○	$\left(\frac{1}{p} - 1 \right) \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = \left(\frac{1}{q} - 1 \right) \left(\frac{1}{r} - 1 \right)$

1-p: 予報の空振り率, 1-q: 地震の見逃し率, 1-r: 異常がないときの安心度

第3表 n個の観測項目がある場合の地震予知に関する確率

Table 3 Expressions for multi-element prediction under the assumptions described in the text.

場合	A_1 から A_n まで同時に異常が現れたとき, 共通の異常期間を異常期間とする	A_1 から A_n までのいずれか(複数でもよい)の異常期間はすべて異常期間とする(すべてが正常な期間のみ正常期間)	A_1 から A_k まで同時に異常が現れ, A_{k+1} から A_n までは正常であるとき, 共通の異常期間を異常期間とする。
A	$A_1 \cap \dots \cap A_n$	$A_1 \cup \dots \cup A_n$	$A_1 \cap \dots \cap A_k \cap \bar{A}_{k+1} \cap \dots \cap \bar{A}_n$
q_0	$p_0 q_1 \dots q_n + (1 - p_0) s_1 \dots s_n$	$1 - p_0 (1 - q_1) \dots (1 - q_n) - (1 - p_0) (1 - s_1) \dots (1 - s_n)$	$p_0 q_1 \dots q_k (1 - q_{k+1}) \dots (1 - q_n) + (1 - p_0) s_1 \dots s_k (1 - s_{k+1}) \dots (1 - s_n)$
p	$\frac{1}{\left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{p_n} - 1 \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{p_0} - 1 \right)^{n-1}}}$	$\frac{1}{1 + \frac{1 - (1 - s_1) \dots (1 - s_n)}{1 - (1 - q_1) \dots (1 - q_n)} \left(\frac{1}{p_0} - 1 \right)}$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{p_k} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_{k+1}} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{r_n} - 1 \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{p_0} - 1 \right)^{n-1}}}$
q	$q_1 \dots q_n$	$1 - (1 - q_1) \dots (1 - q_n)$	$q_1 \dots q_k (1 - q_{k+1}) \dots (1 - q_n)$
r	$\frac{1}{1 + \frac{1 - s_1 \dots s_n}{1 - q_1 \dots q_n} \left(\frac{1}{p_0} - 1 \right)}$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{r_1} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{r_n} - 1 \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{p_0} - 1 \right)^{n-1}}}$	$\frac{1}{1 + \frac{1 - s_1 \dots s_k (1 - s_{k+1}) \dots (1 - s_n)}{1 - q_1 \dots q_k (1 - q_{k+1}) \dots (1 - q_n)} \left(\frac{1}{p_0} - 1 \right)}$
s	$s_1 \dots s_n$	$1 - (1 - s_1) \dots (1 - s_n)$	$s_1 \dots s_k (1 - s_{k+1}) \dots (1 - s_n)$